11 Unitäre Vektorräume

Die Theorie komplexer Vektorräume mit Skalarprodukt folgt denselben Linien wie die Theorie reeller Vektorräume mit Skalarprodukt; die meisten Definitionen und Resultate sind sogar schon wörtlich gleich oder gehen ineinander über durch systematisches Ersetzen der folgenden Begriffe:

$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
euklidischer Vektorraum	unitärer Vektorraum
Bilinearform	Sesquilinearform
symmetrische Bilinearform	Hermitesche Form
transponierte Matrix A^T	adjungierte Matrix $A^* = \overline{A}^T$
orthogonale Abbildung	unitäre Abbildung

11.1 Hermitesche Formen

Sesqui = anderthalb.

Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.

Definition: Eine *Sesquilinearform* auf V ist eine Abbildung

$$\gamma\colon\ V \times V \to \mathbb{C},\ (v,w) \mapsto \gamma(v,w)$$

so dass für alle $v, v', w, w' \in V$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{array}{rcll}
\gamma(v, w+w') & = & \gamma(v,w) + \gamma(v,w') & \text{(rechts additiv)} \\
\gamma(v+v', w) & = & \gamma(v,w) + \gamma(v',w) & \text{(links additiv)} \\
\gamma(v, \lambda w) & = & \lambda \cdot \gamma(v,w) & \text{(rechts homogen)} \\
\gamma(\lambda v, w) & = & \overline{\lambda} \cdot \gamma(v,w) & \text{(links halbhomogen)}
\end{array}$$

Eine *hermitesche Form* auf V ist eine Sesquilinearform γ, so dass für alle $v, w \in V$ gilt

$$\gamma(v,w) \ = \ \overline{\gamma(w,v)}.$$

Vorsicht: Welche Variable linear und welche semilinear ist, wird nicht einheitlich gehandhabt. Die hier gewählte Konvention macht gewisse Formeln schöner.

$f\colon X \to Y,\ x \mapsto f(x)$

$\gamma(v,\cdot)\colon V \to \mathbb{C},\ w \mapsto \gamma(v,w)$

Definition: Die *komplex Konjugierte* einer komplexen Matrix $A = (a_{k\ell})_{k,\ell}$ ist die Matrix $\overline{A} := (\overline{a_{k\ell}})_{k,\ell}$, und die *Adjungierte* ist $A^* := \overline{A}^T$. Analog für Spalten- und Zeilenvektoren.

Definition: Eine komplexe Matrix A mit $A = A^*$ heisst *selbstadjungiert* oder *hermitesch*.

Beispiel: Für jede komplexe $n \times n$-Matrix A ist die folgende Abbildung eine Sesquilinearform:

$$\gamma_A\colon\ \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C},\ (x, y) \mapsto x^* A\, y. \qquad = \overline{x}^T A y$$

Diese ist hermitesch genau dann, wenn A hermitesch ist.

$$\overline{(y^* A x)} = \overline{\overline{y}^T} \cdot \overline{A} \cdot \overline{x} = y^T \overline{A}\, \overline{x} = \overline{x}^T \overline{A}^T y = x^* A^* y$$

$$\overset{?}{=}$$

$$x^* A y$$

11.2 Darstellungsmatrix

Sei $B = (v_1, \ldots, v_n)$ eine geordnete Basis von V.

Definition: Die *Darstellungsmatrix* einer Sesquilinearform γ auf V bezüglich B ist die $n \times n$-Matrix

$$\boxed{[\gamma]_B \;:=\; \big(\gamma(v_k, v_\ell)\big)_{k,\ell=1,\ldots,n}.}$$

Proposition: Für jede komplexe $n \times n$-Matrix existiert genau eine Sesquilinearform γ auf V mit $[\gamma]_B = A$.

Proposition: Eine Sesquilinearform auf V ist hermitesch genau dann, wenn ihre Darstellungsmatrix bezüglich B hermitesch ist.

Proposition: Die Darstellungsmatrix von γ bezüglich jeder weiteren geordneten Basis B' von V ist

$$\boxed{[\gamma]_{B'} \;=\; {}_B[\mathrm{id}_V]^*_{B'} \cdot [\gamma]_B \cdot {}_B[\mathrm{id}_V]_{B'}.}$$

11.3 Komplexe Skalarprodukte

Proposition: Für jede hermitesche Form γ auf V und jeden Vektor $v \in V$ gilt

$$\gamma(v,v) \in \mathbb{R}.$$

Bew.: $\overline{\gamma(v,v)} = \gamma(v,v)$ qed.

Definition: Eine hermitesche Form

$$\langle\ ,\ \rangle\colon\ V \times V \to \mathbb{C},\ (v,w) \mapsto \langle v,w\rangle$$

heisst *positiv definit*, wenn zusätzlich gilt:

$$\forall\, v \in V \smallsetminus \{0\}\colon\ \langle v,v\rangle > 0.$$

Der *Betrag* eines Vektors $v \in V$ bezüglich $\langle\ ,\ \rangle$ ist dann die Zahl

$$\|v\| \ := \ \sqrt{\langle v,v\rangle} \ \in \ \mathbb{R}^{\geqslant 0}.$$

Definition: Eine positiv definite hermitesche Form heisst ein *Skalarprodukt.* Ein $\mathbb{C}$-Vektorraum zusammen mit einem Skalarprodukt heisst *unitärer Vektorraum* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$.

Definition: Das *Standard-Skalarprodukt auf* $\mathbb{C}^n$ ist für $x = (x_k)_k$ und $y = (y_k)_k$ gegeben durch

$\forall z \in \mathbb{C}: \ z\bar{z} = |z|^2$

$$\langle x, y\rangle \ := \ x^*y \ = \ \overline{x}_1 y_1 + \ldots + \overline{x}_n y_n.$$

Der zugehörige Betrag ist die ℓ_2-Norm

$$\|x\| \ := \ \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}.$$

Definition: Eine hermitesche $n \times n$-Matrix A mit der Eigenschaft $x^*A\,x > 0$ für alle $0 \neq x \in \mathbb{C}^n$ heisst *positiv definit*.

Proposition: Sei B eine geordnete Basis von V. Eine hermitesche Form $\langle\ ,\ \rangle$ auf V ist positiv definit genau dann wenn die Darstellungsmatrix $[\langle\ ,\ \rangle]_B$ positiv definit ist.

$$\begin{tikzcd} V \times V \arrow[r] & \mathbb{C} \\ \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \arrow[u, "\varphi_B \times \varphi_B"', "\cong"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

11.4 Grundeigenschaften

Ab jetzt sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein unitärer Vektorraum mit zugehöriger Betragsfunktion $\|\ \|$.

Die Begriffe und Grundeigenschaften aus §10.6, insbesondere die Cauchy-Schwarz Ungleichung und die Definition von normiert und orthogonal, ausser dem Begriff des Winkels und der letzten Proposition von §10.6, gelten wortwörtlich auch für unitäre Vektorräume, mit den entsprechenden Beweisen. Dabei muss man lediglich berücksichtigen, dass ein komplexes Skalarprodukt in der ersten Variable nur semilinear ist, und in den Formeln darf man die Reihenfolge im komplexen Skalarprodukt nicht vertauschen.

Bem.: $(V, \mathrm{Re}\langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist ein euklid. Vektorraum.

Bew. von Cauchy-Schwarz:

$v \neq 0$, $\lambda := \dfrac{\langle v,w\rangle}{\|v\|^2} \Rightarrow$ $\quad \langle w,v\rangle = \overline{\langle v,w\rangle} = \bar\lambda \|v\|^2.$

$$\begin{aligned}\|w-\lambda v\|^2 &= \langle w-\lambda v, w-\lambda v\rangle = \langle w,w\rangle - \langle \lambda v,w\rangle - \langle w,\lambda v\rangle + \langle \lambda v,\lambda v\rangle \\ &= \|w\|^2 - \bar\lambda\langle v,w\rangle - \lambda\langle w,v\rangle + \bar\lambda\lambda\|v\|^2 \\ &= \|w\|^2 - \bar\lambda\lambda\|v\|^2 - \lambda\bar\lambda\|v\|^2 + \bar\lambda\lambda\|v\|^2 \\ &= \|w\|^2 - |\lambda|^2\cdot\|v\|^2.\end{aligned}$$

Rest wie in §10.6. qed.

11.5 Orthogonales Komplement, Orthonormalbasen

Dasselbe gilt für die Begriffe Orthogonal- oder Orthonormalsystem oder -basis aus §10.7, sowie die Begriffe orthogonales Komplement, orthogonale Projektion aus §10.8 und deren Grundeigenschaften.

Für die Beziehung zum Dualraum in §10.12 gilt das dagegen nicht, da für einen unitären Vektorraum die Abbildung $V \to V^\vee := \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$, $v \mapsto \langle v, \ \rangle$ nicht $\mathbb{C}$-linear, sondern nur semilinear ist.

$$\forall v, w \in V: \ \|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle = \langle v,v\rangle + \langle v,w\rangle + \underbrace{\langle w,v\rangle}_{=\,\overline{\langle v,w\rangle}} + \langle w,w\rangle$$

$$= \|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle v,w\rangle + \|w\|^2$$

$$v \perp w \implies \|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$$

11.6 Orthonormalisierung

Dasselbe gilt auch für das Orthogonalisierungsverfahren aus §10.9, genauer:

Satz: *(Gram-Schmidt-Orthogonalisierung)* Für jedes linear unabhängige Tupel $T = (v_1, \ldots, v_n)$ in V existiert genau ein Orthonormalsystem $B = (b_1, \ldots, b_n)$, so dass gilt:

$$(*) \qquad \forall\, 1 \leqslant \ell \leqslant n\colon \boxed{v_\ell = \sum_{k=1}^{\ell} a_{k\ell} b_k} \text{ mit } \underline{a_{k\ell} \in \mathbb{C}} \text{ und } \underline{a_{\ell\ell} \in \mathbb{R}^{>0}}.$$

Ist ausserdem T eine Basis von V, so ist B eine Orthonormalbasis von V.

Bemerkung: Die Bedingung $(*)$ ist äquivalent dazu, dass die Basiswechselmatrix ${}_B[\mathrm{id}_V]_T$ eine obere Dreiecksmatrix mit allen Diagonaleinträgen in $\mathbb{R}^{>0}$ ist.

Konstruktion: Sind $b_1, \ldots, b_{n-1}$ bereits konstruiert, so setze

$$\boxed{\tilde{v}_n := v_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle b_k, v_n \rangle \cdot b_k \qquad \text{und} \qquad b_n := \frac{\tilde{v}_n}{\|\tilde{v}_n\|}.}$$

Folge: Jeder endlich-dimensionale unitäre Vektorraum hat eine Orthonormalbasis.

Satz: *(Cholesky-Zerlegung)* Für jede positiv definite hermitesche Matrix A existiert genau eine komplexe obere Dreiecksmatrix R mit allen Diagonaleinträgen in $\mathbb{R}^{>0}$, so dass $A = R^*R$ ist.

11.7 Unitäre Gruppe

Die Begriffe und Grundeigenschaften aus §10.10 übertragen sich auf unitäre Vektorräume, indem man jeweils reell, orthogonal, A^T durch komplex, unitär, A^* ersetzt. Genauer haben wir:

Definition: Ein Isomorphismus $f\colon V \xrightarrow{\sim} W$ zwischen zwei unitären Vektorräumen mit der Eigenschaft

$$\boxed{\forall v, v' \in V\colon\ \langle f(v), f(v')\rangle = \langle v, v'\rangle}$$

heisst *unitär* oder eine *Isometrie.*

Proposition: Zwischen beliebigen unitären Vektorräumen derselben endlichen Dimension existiert eine Isometrie. Jede Komposition von Isometrien ist eine Isometrie. Der identische Endomorphismus ist eine Isometrie.

& Inverse.

Definition: Eine komplexe $n \times n$-Matrix A, für welche die Abbildung $L_A \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ für das jeweilige Standard-Skalarprodukt eine Isometrie ist, heisst *unitär*. Die Menge $\mathrm{U}(n)$ aller unitären $n \times n$-Matrizen heisst die *unitäre Gruppe vom Grad n*.

Proposition: Für jede komplexe $n \times n$-Matrix Q sind äquivalent:

(a) Q ist unitär.

(b) Die Spalten von Q bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^n$ mit dem Standard-Skalarprodukt.

(c) $Q^*Q = I_n$.

(d) $QQ^* = I_n$.

L_Q Isometrie $\iff \forall x, y \in \mathbb{C}^n: \langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle = x^* y = x^* I_n y$

$\langle Qx, Qy \rangle = (Qx)^* \cdot (Qy) = x^* \underbrace{Q^* Q}\, y$

Proposition: Die Menge $\mathrm{U}(n)$ ist eine Gruppe bezüglich Matrixmultiplikation.

Bemerkung: Die $\mathrm{U}(n)$ ist eine kompakte Teilmenge von $\mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{n^2}$.

Satz: *(Variante der Gram-Schmidt-Orthogonalisierung)* Sei V ein unitärer Vektorraum der Dimension $\geqslant n$. Für alle $v_1, \ldots, v_n \in V$ existiert ein Orthonormalsystem $(b_1, \ldots, b_n)$ in V, so dass für alle $1 \leqslant \ell \leqslant n$ gilt

$$v_\ell = \sum_{k=1}^{\ell} a_{k\ell} b_k \quad \text{für geeignete } a_{k\ell} \in \mathbb{C}.$$

Satz: *(QR-Zerlegung)* Für jede komplexe $n \times n$-Matrix A existiert eine unitäre Matrix Q und eine komplexe obere Dreiecksmatrix R, so dass $A = QR$ ist.

11.8 Adjungierte Abbildungen

Die Begriffe und Grundeigenschaften aus §10.13 gelten wortwörtlich auch für unitäre Vektorräume, mit denselben Beweisen, wobei jeweils nur A^T durch A^* und symmetrisch durch hermitesch zu ersetzen ist. Insbesondere gilt für jede lineare Abbildung zwischen unitären Vektorräumen $f\colon V \to W$:

Proposition: Es gibt höchstens eine lineare Abbildung $f^*\colon W \to V$ mit der Eigenschaft

$$\boxed{\forall v \in V\ \forall w \in W\colon\ \langle f(v), w\rangle = \langle v, f^*(w)\rangle.}$$

Definition: Diese heisst die *Adjungierte (Abbildung) von f*, wenn sie existiert.

Beweis analog.

Proposition: Ist f^* die Adjungierte von f, so ist auch f die Adjungierte von f^*, das heisst, es gilt $(f^*)^* = f$. Man nennt f und f^* daher auch *zueinander adjungiert.*

Bew.: $\forall v, w$: $\langle f^*(v), w\rangle = \overline{\langle w, f^*(v)\rangle} = \overline{\langle f(w), v\rangle} = \langle v, f(w)\rangle$

qed.

Proposition: Ist $\dim V < \infty$, so existiert die adjungierte Abbildung f^*. Genauer gilt für jede geordnete Orthonormalbasis $(b_1, \ldots, b_n)$ von V

$$\boxed{\forall w \in W\colon\ f^*(w) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \langle f(b_k), w\rangle \cdot b_k.}$$

Proposition: Seien B eine geordnete Orthonormalbasis von V und B' eine geordnete Orthonormalbasis von W. Dann gilt

$$_B[f^*]_{B'} \;=\; _{B'}[f]^*_B.$$

Bem.: $V = \mathbb{C}^n$, $W = \mathbb{C}^m$, $f = L_A$ | $\forall v \in V$ $\forall w \in W$: $\langle L_A(v), w\rangle = (Av)^* w = v^* A^* w = \langle v, L_{A^*}(w)\rangle$.

Proposition: Für jede komplexe $m\times n$-Matrix A ist die Adjungierte der linearen Abbildung $L_A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ die lineare Abbildung $L_{A^*}\colon \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$.

Definition: Eine lineare Abbildung $f\colon V \to V$, die ihre eigene Adjungierte ist, heisst *selbstadjungiert.*

Beispiel: Die Abbildung $L_A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ ist selbstadjungiert genau dann, wenn A selbstadjungiert, das heisst, hermitesch ist.

Bei den Grundeigenschaften ist ausserdem die Semilinearität zu beachten:

Proposition: Für alle linearen Abbildungen f, g unitärer Vektorräume gilt, soweit sinnvoll:

(a) $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$,
(b) $(f + g)^* = f^* + g^*$,
(c) $(cf)^* = \overline{c} f^*$ für alle $c \in \mathbb{C}$.